Chapter 14

La teoria assiomatica dell'aritmetica al primo ordine

[1]

In queste pagine presentiamo una nota teoria assiomatica per l'aritmetica dei numeri naturali, l'*aritmetica di Peano al primordine* (PA).

Simboli descrittivi

- simboli di funzione 0-ari (costante individuale): $\underline{0}$
- simboli di funzione 1-ari: s
- simboli di funzione 2-ari: $+, \cdot$
- simboli di predicato 2-ari: $=$

Assiomi

- gli assiomi della logica classica al primo ordine con identità
- PA1: $\forall x \neg(\underline{0} = s(x))$
- PA2: $\forall x \forall\, y(s(x) = s(y) \to x = y)$
- PA3.1: $\forall x(x + \underline{0} = x)$
- PA3.2: $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
- PA4.1: $\forall x(x \cdot \underline{0} = \underline{0})$
- PA4.2: $\forall x \forall y(x \cdot s(y) = xy + x)$

[1]Liberamente tratto da "*Logica e teorie formalizzate*" di R. Rogers, Feltrinelli, 1978.

- PA5: $A(\underline{0}) \wedge \forall x[A(x) \rightarrow A(s(x))] \rightarrow \forall x A(x)$
  dove $A(x)$ una qualsiasi f.b.f. nel linguaggio di PA (*Principio di induzione matematica*)

La teoria PA ha un'interpretazione privilegiata che consiste nella struttura dei numeri naturali, dove:

- il dominio di individui l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- la costante individuale $\underline{0}$ designa il numero 0
- il simbolo di funzione 1-ario s designa l'operatore di *successore* (ovvero l'operazione che associa ad ogni numero n il numero $n + 1$)
- i simboli di funzione binari $+, \cdot$ designano rispettivamente le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione*

Sulla base di questa interpetazione privilegiata PA1 stabilisce che il numero 0 non successore di alcun numero naturale.

PA2 stabilisce che se i successori di due numeri x e y sono identici, allora anche x e y sono identici tra loro[2].

Il principio dell'induzione matematica PA5 afferma che per ogni formula $A(x)$, se 0 soddisfa tale formula (ovvero si ha $A(\underline{0})$) e preso un qualsiasi numero x, qualora tale numero soddisfi la formula la soddisfa anche il suo successore (ovvero si ha $\forall x(A(x) \rightarrow A(s(x))$, allora tutti i numeri soddisfano quella formula (cioè $\forall x A(x)$).
Forniremo pi avanti esempi di utilizzo del principio di induzione.

Gli assiomi PA3.1 e PA3.2 sono assiomi *induttivi* per l'addizione. L'assioma PA3.1 afferma che sommando $\underline{0}$ a un numero qualsiasi x si ottiene nuovamente x come risultato. PA3.2 invece definisce il risultato della somma di un nunero x per il successore di un numero y.

Infine, gli assiomi PA4.1 e PA4.2 sono assiomi *induttivi* per la moltiplicazione. PA4.1 afferma che moltiplicando un numero qualsiasi x per 0 si ottiene nuovamente 0 come risultato. PA4.2 invece definisce il risultato del prodotto di un numero x per il successore di un numero y (esso coincide con la nota legge distributiva $x \cdot (y + 1) = xy + x$).

La natura *induttiva* degli assiomi PA3-PA4 si riconduce al principio di induzione: in ciascuno di questi casi si ha a che fare con un *caso base* (PA3 e PA4), e con il *passo* al successivo di un caso arbitrario (PA3.2 e PA4.2).

Nei termini dei simboli di funzione "$\underline{0}$" e "s" si possono immediatamente definire gli usuali *numerali arabi* nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
0 &=_{\text{def}} \underline{0} \\
1 &=_{\text{def}} s(\underline{0}) \\
2 &=_{\text{def}} s(s(\underline{0})) \\
3 &=_{\text{def}} s(s(s(\underline{0}))) \\
4 &=_{\text{def}} s(s(s(s(\underline{0}))))
\end{aligned}
$$

[2]Si noti che nella struttura dei numeri naturali vale anche il contrario, ovvero $\forall x \forall y(x = y \rightarrow s(x) = s(y))$. Tuttavia questa legge vale in realt per tutte i simboli di funzione e per tutte le strutture, in quanto istanza dell'assioma I2, ed quindi gi inclusa tra gli assiomi della logica al primordine con identit.